Unidad I: Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1 Teoría preliminar

Un sistema de ecuanciones diferenciales es un conjunto de ecuaciones diferenciales que relacionan varias funciones incógnitas, las derivadas de esta función, las variables con respeto a las que estan definidas y ciertas constantes

Este sistema tiene el tiempo t como única variable independiente y dos funciones incógnitas x(t) e y(t).

1.1.1 Definiciones (Ecuación diferencial, orden, grado, linealidad)

Como su nombre lo indica, una ecuación diferencial es aquella ecuación que contiene algunos términos diferenciales. Estos son los diferenciales de la función que contiene la variable dependiente de la ecuación diferencial dada. Contiene también una o varias variables independientes.

El formato general de una ecuación diferencial es,

$$\frac{dy}{dx}+f(x,y)=g(x)$$

O,

$$Dy(x)+f(x)y(x)=g(x)$$

Al hablar de las ecuaciones diferenciales, tenemos que entender algunas terminologías básicas relacionadas con estas ecuaciones. Algunas de estasse analizan a continuación.

1. Orden de una ecuación diferencial: El orden más alto de cualquiera de los diferenciales en la ecuación diferencial dada es el orden de la ecuación diferencial. Tomemos un ejemplo para clarificar el término.

d2y/ dx2 – 2yx2 = 9x

El diferencial presente en la ecuación anterior es d2y/ dx2 y el orden de este diferencial es segundo. Por lo tanto, el orden de la ecuación diferencial es uno.

2. Grado de una ecuación diferencial: El grado más alto de cualquiera de los diferenciales en la ecuación diferencial dada es el grado de la ecuación diferencial. El siguiente ejemplo debe aclarar la definición.

d2y/ dx2 – 2yx2 = 9x

En la ecuación diferencial anterior que contiene el diferencial d2y/ dx2, el grado del diferencial es uno, por lo tanto, el grado de la ecuación diferencial es uno.

3. Ecuación diferencial lineal: Una ecuación diferencial que no contiene términos como producto de la función indefinida ni los del diferencial de la función indefinida se llama ecuación diferencial lineal. Manteniéndola recta, todos los términos coeficientes son funciones que contienen variables aumentadas. Esta es de la forma,

$$b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

Esta es una ecuación diferencial linealde primer orden.

4. Ecuación diferencial no lineal: Las ecuaciones diferenciales que no se ajustan a las condiciones antes mencionadas son llamadas ecuaciones diferenciales no lineales. Esto significa que una ecuación diferencial no lineal contiene los términos donde la variable dependiente y su diferencial aparecen juntos. Un ejemplo de ello sería,

$$xy'' + 2y' + x = 1$$

5. Ecuación diferencial Cuasi lineal: Una ecuación diferencial cuasi lineal es un caso especial de la ecuación diferencial lineal. En este tipo de ecuación diferencial, la función indefinida y sus diferenciales pueden aparecer juntos para todos los términos excepto para los términos que contienen el diferencial de más alto orden. Esta es de la forma,

$$w_x + a w_y = f(x) w + g(x) w^k$$

6. Ecuaciones diferenciales homogéneas: Una ecuación diferencial en la cual cada término tiene como coeficiente sea el diferencial de la variable dependiente o la variable dependiente en sí es una ecuación diferencial homogénea. Esta de la forma,

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = g(x)$$

Es una ecuación diferencialhomogéneade segundo orden.

7. Ecuaciones diferenciales no homogéneas: Las ecuaciones diferenciales que no cumplen la condición establecida anterior son llamadas ecuaciones diferenciales no homogéneas. Estas son de la forma,

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$$

8. Solución general de la ecuación diferencial: La integración de la ecuación diferencial produceuna solución general para aquella ecuación diferencial. Una ecuación diferencial ordinaria de orden m que contendría n constantes de integración que resultan del proceso de integración en la cascada para m tiempos.

9. Solución particular de la ecuación diferencial: El resultado obtenido en el proceso anterior puede ser modificado para obtener una solución particular mediante la sustitución de algunos valores de las constantes de integración.

1.1.2Soluciones de las ecuaciones diferenciales

Resolver una ecuación diferencial requiere el conocimiento previo de las técnicas de integración. Una ecuación diferencial es llamadatambién una extensión del cálculo de integración. Sin embargo, antes de intentar resolver una ecuación diferencial, es esencial analizar el orden de la ecuación diferencial ya que las técnicas de solución de una ecuación diferencial de primer orden, la ecuación diferencial de segundo orden y la ecuación diferencial de ordensuperior son diferentes.

Ahora vamos a entender las técnicas para solucionar las mismos:

Ecuación Diferencial de Primer Orden:

De primer orden, una ecuación diferencial de primer grado se denota como,

$$Mdx + Ndy = 0$$

Los siguientes son los métodos para resolverlas:

1. Método de separación de variables: Si la función dada puede transformarse de manera talque el diferencial de una variable en particular aparezca como el único coeficiente de la función definiéndola. Por otra parte, esa función debería definir sólo esta variable y no otra variable, si esto se cumple, entonces la técnica de separación de variables puede aplicarse. Después de la alteración de la función, la función debe convertirse en una como,

$$f(x)dx + f(y)dy = c$$

Después que la función se transforma en talforma, integra cada término de forma independiente para obtener la solución.

2. Ecuación diferencial homogénea: No todas las ecuaciones diferenciales pueden ser modificadas para tomar la forma descrita anteriormente. En el caso que la técnica anterior no funcione, entonces comprueba la homogeneidad de la ecuación. Una ecuación homogénea es aquella en la cual la sustitución de las variables con un producto de esa variable y una constante resultaría en la misma ecuación que antes.

$$x \to \lambda x$$
$$y \to \lambda y$$

Para resolver una ecuación de este tipo sustituye y = cx. Entonces dy/ dx = c + c(dc/ dx). También la ecuación diferencial dadaM dx + N dy = 0 se puede reescribir como, dy/ dx = -(M/ N). dy/ dxpuede escribirse como, f©. Por lo tanto, para separar las variables c y c podemos escribir, dx/ x = dc/ (f© – c). Esto haría la ecuación de manera talque sea posible que las variables sean separadas y que la técnica de separación de variablessea aplicada.

1.1.3 Problema del valor inicial.

Las ecuaciones diferenciales pueden ser de dos tipos principalmente, una ecuación diferencial ordinaria y una ecuación diferencial parcial. También sabemos que una ecuación diferencial se compone del derivado de una función indefinida, la función indefinida y una variable autónoma.

Un problema de valor inicial es una ecuación diferencial ordinaria que tiene un pre-requisito inicial sujeto con la misma. Este pre-requisito es la salida de la función indefinida para algún valor que se encuentra dentro del dominio de la ecuación diferencial dada. Esto se puede expresar matemáticamente como,

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Donde,

$$f : \Omega \subset R X R^n \rightarrow \; R^n$$

El tiene un lugar en el dominio de la función dada y este es un conjunto abierto.

$$(t_0, y_0) \in \Omega$$

Este es el pre-requisito inicial de la ecuación diferencial dada.

La solución de este problema de valor inicial es también una solución de la ecuación diferencial dada y debería ser una función que cumpla la condición,

$$y(t_0) = y_0$$

Como sabemos una ecuación diferencial ordinaria puede ser de primer orden, de segundo orden o de órdenes superiores. Dependiendo del orden de la ecuación diferencial, varia el tamaño de y, esto significa que para una ecuación diferencial de orden superior y es un vector; también que para los diferenciales de orden superior las variables pueden ser traídas, en otras palabras, se puede afirmar que y es una función de dimensiones infinitas.

Al igual que es posible establecer un problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria, también lo es para una ecuación diferencial parcial. La diferencia aquí es que en vez de una ecuación diferencial ordinaria, se utiliza una ecuación diferencial parcial que tiene unpre-requisito inicial sujeto a la misma. Este pre-requisito inicial es establecido para la función indefinida definiendo la ecuación diferencial parcial, la cual es una función compuesta.

Los problemas de valor inicial ayudan a determinar una respuesta exclusiva a partir de lasmúltiples respuestas posibles para la ecuación diferencial dada. Sin embargo, aunque es posible establecer una serie de pre-requisitos inicialespara una ecuación diferencial en particular y sólo unos pocos de ellos nos llevaría a una respuesta exclusiva parael problema dado. Por lo tanto, es posible concluir que para algunos pre-requisitos iniciales pueden existir muchas o ningunasolución. Por este motivo, hacer una correcta elección del pre-requisito a ser establecido es la mayor confusión. Otra cosa más importante a destacar aquí es¿Cuántos pre-requisitos inicialesserán establecidos para la ecuación diferencial dada? Esto dependerá del orden de la ecuación diferencial dada, para una ecuación diferencial de primer orden sólo es posible establecer un pre- requisito inicial,el cual da a la salida de la función en ese punto.

Del mismo modo, para una ecuación diferencial de segundo orden se establecen dos pre-requisitos iniciales, uno da la salida de la función y el otro da la salida del diferencial de la función en ese mismo punto, y así sucesivamente.

Veamos un ejemplo de esta categoría para entender la técnica para solucionar el problema.

$p'' + p' - 6p = 0$ dado que $p(0) = 5$ y $p'(0) = 0$

La ecuación característica de la ecuación diferencial dada es $x2 + x - 6 = 0$, la cual es factorizada como $(x - 2)(x + 3) = 0$. Esto nos da la solución general de la ecuación como, p(t) = c1 e-3t + c2 e2t y

p’(t) = −3 c1 e-3t + 2 c2 e2t

Coloca los pre-requisitos iniciales en las ecuaciones.

p(0) = c1 e0 + c2 e0

p’(0) = −3 c1 e0 + 2 c2 e0

Al resolver las dos ecuaciones simultáneamente, obtenemos los valores de c1 y c2 como 2, 3, respectivamente. Por lo tanto la soluciónes,

p(t) = 2 e-3t + 3 e2t

1.1.4 Teorema de existencia y unicidad.

El teorema de existencia y unicidad es una extensión del problema con valor inicial. Este teorema afirma que existe una solución para los pre-requisitos iniciales provistos de la ecuación diferencial y la solución obtenida, es de hecho, una solución única.

Imagina una función valorada real f(p, q), cuyo valor es constante para un rectángulo definido por la ecuación,

$$R = (p,q); |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$$

Ahora supongamos que el diferencial parcial de la función real dada con respecto a la variable q también tiene un valor continuo de este rectángulo. Entonces puede concluirse que para la función dada tenemos algún intervalo I donde la función dada tiene una solución cuyo valor es único dentro de ese intervalo. Aquí el pre-requisito inicial definido para la función es,

q' = f(p, q) y, q(p0) = q0

Y la ecuacióndefiniendo el intervalo de la funciónes,

$$I = [x_0 - h, x_0 + h]$$

Aquí el valor de h debería ser menor o igual que a.

Para demostrar el teorema establecido arriba, pretendemos elegir el método de demostración por contradicción. Esto significa que vamos a suponer que las afirmaciones anteriores son verdaderas. También significa que existe una solución para la función dada; asume que la solución es una función q(p). Estosignificaquetenemos,

q(p) = q0 + f(t, q(t) dt

Esto es porque si q(p) es una ecuación funcional para la ecuación diferencial dada, entonces podemos concluir que esta es una solución a esa ecuación diferencial. Por lo tanto, también podemos escribir,

q' = f(p, q) y, q(p0) = q0

Las aproximaciones sucesivas, también famosas por el nombre de su inventor, este es, el método de iteración dePicard, esta es una técnica utilizada para determinar esta ecuación de la función para una ecuación diferencial. Los pasosparadeterminarlason los siguientes:

1. Sea q(p0) = q0 el pre-requisito inicial para la ecuación diferencial dada. Supongamos que esta es cierta para cada valor de p.

2. Ahora usa la fórmula intermitente para determinar el valor de qn como,

$$q_{n+1}(p) = q_0 + \int_{p_0}^{p} f(t, q_n(t))\,dt$$

3. Utilizando el método de inducción, una secuencia completa de las funciones puede generarse. Usando estas funciones y los pre-requisitos iniciales podemos obtener la solución al problema dado.

Finalmente, veamos un ejemplo ilustrativo para aclarar el concepto.

Resuelve la ecuación diferencial q’ = 2 p (1 + q) dado queq(0) = 0.

La ecuación asociada de la integración para la ecuación diferencial dada sería,

g(p) = 2 s (1 + q(s)) ds

Asumequeq0(p) = 0. Entonces lafórmulapara la recurrencia de cada p mayor que uno es,

qn+1(p) = 2 s (1 + qn(s)) ds

Por lo tanto, obtenemos

q1(p) = 2 s ds y,

q2(p) = 2 s (1 + s2) ds

q2(p) = p2 + p4/ 2.

Esto nos da la secuencia de las funciones como,

qn(p) = p2 + p4/ 2 + p6/ 3! +… + p2n/ n!

Esta es la serie de Taylor, y por tanto, la ecuación funcional de la ecuación diferencial,

q(p) = - 1

1.2 ED de variables separables y reducibles

Ecuación diferencial de variables separadas y reducibles

El método de separación de variables es una de las varias técnicas utilizadaspara resolver las ecuaciones diferenciales.

Sólo es posible aplicar la técnica de separación de variables a aquellas funciones que han sido transformadas, de manera tal,que el diferencial de la variable particular sólo aparece con una función definiendo esta variable y no con otra función.

Además esa función debe tener sólo esa variable en particular y no otra variable. La forma reducida de tal función es,

$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

Esta técnica de solución de ecuaciones diferenciales tiene su base en la suposición de que para una función definida como:

$$f(x,t) = \varphi(x)G(t)$$

habrá una respuesta para alguna secuaciones diferenciales parciales homogéneas definidas de forma lineal. Esta ecuación diferencial será definida para las variables x y t. Hacer esta suposición reducirá las ecuaciones diferenciales en funciones definidas separadamente que son sumadas juntas, ya que sabemos que todas las funciones indefinidas en cada ecuación diferencial dada es constante si tenemos el producto de estas funciones con las variables independientes como términos constantes.

Estas funciones definidas separadamente, pueden ser finalmente, integradas por separado utilizando las técnicas adecuadas de integración y se suman juntas para obtener el resultado final.

Por ejemplo, para la ecuación diferencial u/ t = c (2u/ x2) dada u(x, 0) = f(x), u(0, t) = 0 y u(L, t) = 0, podemos aplicar la técnica de separación de variables.

De acuerdo con la técnica de separación de variables, el resultado de resolver la ecuación será un producto de las funciones en la ecuación dada como,

$$f(x,t) = \varphi(x)G(t)$$

Para resolver la ecuación diferencial dada coloca esto en la ecuación dada para calcular la resultante,

[((x) G(t))]/ t = c [2((x) G(t))]/ x2

(x) dG/ dt = c G(t) d2 / dx2

En la relación anterior, G(t) puede ser factorizada fuera de las diferenciales espaciales y (x) puede ser factorizada fuera de la variable tiempo. Esto dejará la relación sin ningún tipo de diferenciales parciales. Sin embargo, esto convertiría la ecuación en mucho más críptica, entonces mejor reorganiza la ecuación dada para mover las variables de un lado a otro como,

(1/ G) dG/ dt = c (1/) d2 / dx2 (1/ c.G) dG/ dt = (1/) d2 / dx2

Después de terminar este proceso, finalmente necesitamos hacer las dos ecuaciones iguales con el fin de aplicar la técnica de separación variable. Esto se hace mediante igualar la ecuación completa en una constanteseparación como, (1/ c.G) dG/ dt = (1/) d2 / dx2 = -

Esta relación puede ser dividida en dos ecuaciones ordinarias como,

dG/ dt = -c G y, d2 / dx2 = -

Ahora cambiemos nuestro enfoque a las condiciones iniciales establecidas.

La primera establece que, u(0, t) = 0 = G(t) (0). Sin embargo igualando G(t) a cero sería u(x, t) = 0 conduciendo a una solución trivial. Por tanto, (t) = 0. Y la segunda establece u(L, t) = 0 = G(t) (L). Tenemos de nuevo (L) = 0 para tener una solución no trivial.

Un pequeño ejemplo sería de mucha ayuda.

$2dq/ q = [(p + 1) dp]/ p$

Reorganiza la ecuación anterior para obtener,

$2dq/ q = [1 + 1/ p] dp$

La ecuación anterior tiene sus variables separadas y ya es posible integrarlas por separado,

$2dq/ q = [1 + 1/ p] dp$

$2 \ln q = p + \ln p + C$

1.3 ED exactas y factor integrante.

Una ecuación diferencial exacta representa una forma general de las ecuaciones diferenciales a diferencia de las ecuaciones diferenciales homogéneas o las ecuaciones de Bernoulli. Para resolver una ecuación diferencial general, requerimos de un formato general o un enfoque general más que de una técnica especializada que intente simplificar un conjunto restringido de ecuaciones diferenciales. Una forma general de un diferencial es,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Esto puede ser reorganizado y escrito como,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Una ecuación diferencial es llamada exacta si para alguna función u, definida para las mismas variables que la ecuación diferencial, tenemos las siguientes condiciones verdaderas,

$$\frac{\delta u}{\delta x} = M(x,y)$$
$$\frac{\delta u}{\delta y} = N(x,y)$$

Esto significa que las derivadas parciales de esa función con respecto a la primera variable debería ser igual a uno de los términos de la ecuación diferencial y las derivadas parciales de esa función con respecto a la segunda variable debería ser igual al segundo término de la ecuación diferencial.

También que si la misma función de los segundos diferenciales parciales con respecto a la variable opuesta como la anterior, son continuos entonces tenemos que,

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x} = M(x,y)$$
$$\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = N(x,y)$$

A la luz de las declaraciones anteriores, una prueba evaluadora para verificar que la ecuación dada es una ecuación diferencial exacta sería,

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$$

Los siguientes son los pasos para obtener la solución para una ecuación diferencial exacta:

1. El primero y más importante paso es la realización de una prueba evaluadora para verificar si la ecuación dada es una ecuación diferencial exacta o no.

2. Ahora, divide la ecuación e iguala los diferentes términos de la ecuación a los diferenciales parciales como,

$$\frac{\delta u}{\delta x} = M(x,y)$$
$$\frac{\delta u}{\delta y} = N(x,y)$$

3. Ahora integra cualquiera de las dos relaciones dependiendo de su nivel de complejidad. La primera relación se integra con respecto a x, mientras que la segunda está integrada con respecto a y. Imaginemos entonces que se elige,

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \theta(y)$$

El término está incluido en la integración porque es un integrando de un diferencial parcial donde hemos asumido que y es un término constante.

4. El valor de se determina mediante el uso de la segunda relación (la que no estaba integrada). Esto se hace mediante,

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}\left[\int M(x,y)\,dx\right] + \theta'(y) = N(x,y)$$

Como sabemos que ’(y) está definida solamente por la variable y, esto significa que si se obtienen unos términos que contienen la variable x en la ecuación dando el valor de ’(y), entonces tenemos que volver a rastrear toda la solución.

5. Después de obtener la expresión de ’(y) intégrala para determinar la expresión de (y).

6. Esta expresión es entonces sustituida en el integrando para determinar la expresión de la función u(x, y).

7. La ecuación implícita u(x, y) = C ofrece todas las respuestas.

8. En el caso de problemas de valor inicial, coloca los pre-requisitos iniciales para obtener el valor de la constante.

Sin embargo, no todas las ecuaciones vienen a ser una ecuación diferencial exacta. Luego para resolver estas ecuaciones, primero tenemos que determinar un factor de integración el cual hace de la ecuación una ecuación diferencial exacta y el procedimiento puede continuar. Esto significa que,

$$\frac{\delta M}{\delta y} \neq \frac{\delta N}{\delta x}$$

En este escenario necesitamos obtener una función u(x, y) tal que,

$$u(x,y)M(x,y)dx + u(x,y)N(x,y)dy = 0$$

Esta es una ecuación diferencial exacta.

Esta función se denomina factor de integración de la ecuación diferencial dada. El factor de integración debería satisfacer,

$$\frac{\delta M}{\delta y}u + \frac{\delta u}{\delta y}M = \frac{\delta N}{\delta x}u + \frac{\delta u}{\delta x}N$$

Los pasos para determinar un factor de integración son:

1. Suponiendo que ladada es una ecuación diferencial inexacta calcula

$$\frac{\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}}{N}$$

Si la expresión obtenida sólo contiene la variable x, pasa al siguiente paso mas calcula,

$$\frac{\frac{\delta N}{\delta x}-\frac{\delta M}{\delta y}}{M}$$

Si la expresión obtenida sólo contiene la variable y, pasa al siguiente paso si no, no es posible resolver la ecuación diferencial usando esta técnica.

2. Si la expresión obtenida es definida sólopara la variable x entonces,

$$u(x)=\mathrm{e}^{\left(\int\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{N}dx\right)}$$

Si no,

$$u(y)=\mathrm{e}^{\left(\int\frac{\frac{\delta N}{\delta x}-\frac{\delta M}{\delta y}}{M}dy\right)}$$

3. Finally desarrolla,

$$u(x,y)M(x,y)dx+u(x,y)N(x,y)dy=0$$

1.4 ED lineales.

Disciplinas tales como ingeniería, física y economía. Una ecuación diferencial es una ecuación matemática de una función indeterminada de una o varias variables relacionada con los valores de la función en sí misma y con sus derivados de varios órdenes. Las ecuaciones diferenciales se clasifican en dos partes de la siguiente manera: -

1. Ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

Se dice que una ecuación diferencial es una ecuación diferencial parcial cuando la función desconocida es función de varias variables independientes y la ecuación implica sus derivadas parciales.

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Se dice que una ecuación diferencial es una ecuación diferencial ordinariacuando la función desconocida esfunción de una sola variable independiente. En la forma más simple, la función desconocida es una función valorada real o compleja.

Dependiendo de la naturaleza de las ecuaciones diferenciales estas pueden llamarse homogéneas o no homogéneas. Una ecuación diferencial lineal homogénea es simplemente una ecuación en la cual ambos coeficientes de las diferenciales dy y dt son homogéneos, y las ecuaciones no homogéneas son sencillamente una ecuación en la cual ambos coeficientes de las diferenciales dy y dt no son homogéneas.

(d/ dt) y(t) + a(t) y(t) = 0 (Ecuación diferencial lineal homogénea)

(dy/dx) xy = x3 sin (x) (Ecuación diferencial lineal no homogénea)

La ecuación escritaarribaes llamada una ecuación diferencial lineal homogéneade primer orden. Se dice que es homogénea, porque después de colocar todos los términos que contienen la ecuación desconocida y sus derivados en el lado izquierdo, el lado derecho es igual a cero para todo t. Es lineal, porque y(t) y su derivado parecen estar “solos”, es decir, no son componentes de una función compuesta. En la expresión anterior a(t) representa una función continua autoritaria de t, yesta podría ser sólo una constante que se multiplica por y(t); en tal caso piensa en esta como una función constante de t. La ecuación anterior es una ecuación diferencial lineal homogénea, ya que no forma parte de una función compuesta como cos (y(t)), ey(t) etc.Cualquier ecuación diferencial que contenga términos como estos es llamada no lineal.

La ecuación anterior es de primer orden debido a que la mayor derivada de la función desconocida es su primera derivada. Una ecuación diferencial de segundo orden contendría términos como,

$$A\frac{d^2x}{dt^2}y + B\frac{dy}{dx} + Cx = D$$

Se dice que es de segundo orden debido a la derivada de orden más altopresente, lineal, porque ninguna de las derivadas está elevada a alguna potencia, y los multiplicadores de las derivadas son constantes.

Sin embargo, esta no es una ecuación homogénea, ya que consta de una función conocida en el lado derecho, es decir, D. Una forma general de la ecuación diferencial lineal homogénea sería,

$$A\frac{d^2x}{dt^2}y + B\frac{dy}{dx} + Cx = 0$$

Del mismo modo, una ecuación diferencial lineal homogénea puede llegar hasta el enésimo orden.

Si asumimos que y¬1¬(x) e y¬2¬(x) son una de las soluciones de la ecuación diferencial linealhomogénea dada, la sumatoria de las dos, esto es, y3, x0 es también una de las soluciones de la ecuación diferencial dado que,

$$y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

Y la solución general de esta ecuación puede determinarse mediante el uso de la ecuación,

$$y(x) = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$$

Aquí tenemos A, B, m¬1¬, m¬2¬como términos constantes.

1.5 ED de Bernoulli

Una ecuación diferencial de la forma general,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$ es llamada una ecuación diferencial de Bernoulli si el valor de n no es igual a cero o a uno. Una ecuación de Bernoulli es una extensión de la ecuación diferencial lineal o en otras palabras, una ecuación diferencial lineal es un caso especial de la ecuación de Bernoulli dado que, mediante hacer el valor de n igual a cero o uno, la ecuación se reduce a una ecuación diferencial lineal.

Por lo tanto, la ecuación de Bernoulli es una ecuación diferencial no lineal. Generalmente se utiliza el método de sustitución para resolver la ecuación diferencialde Bernoulli. De forma general sustituimos,

v = y1-n

Por lo tanto, tenemos que,

dv/ dx + (1 + n) p(x) v = (1 – n) q(x)

Al hacer estas transformaciones, podemos convertir la ecuación dada en una ecuación lineal en términos de la variable v, la cual puede ser resuelta con facilidad. Después de resolver esta ecuación, se obtendrá una ecuación de la forma

y = v1/(1-n)

Aquí, si el valor de n es mayor que uno, entonces es necesario agregar y = 0 como una de las soluciones de la ecuación diferencial dada.

Los pasos detallados para resolver la ecuación de Bernoulli son:

1. Calcula la ecuación diferencial para verificar si la ecuación dada es una ecuación de Bernoulli.

2. Realiza la sustitución en la ecuación dada.

v = y1-n

3. Ahora, haciendo uso de las técnicas de diferenciación, determina la ecuación que la nueva variable v puede satisfacer. La forma de esta ecuación es como la siguiente,

dv/ dx + (1 + n) p(x) v = (1 – n) q(x)

4. Luego resuelve esta ecuación lineal para determinar el valor de la nueva variable v.

5. Ahora reprograma la ecuación diferencial de Bernoulliactual. Esto se hace mediante sustituir el valor de v en la ecuación,

y = v1/(1-n)

Esto nos dará el valor de la variable y. Ahora coloca el valor de y en la ecuación diferencial dada.

6. En caso de que el valor de n sea mayor que uno, entonces y = 0 también se agrega a la lista de soluciones determinada en el paso cuatro.

7. Para los problemas de valor inicial, la solución exacta puede obtenerse colocando las condiciones iniciales en la ecuación.

Para entender mejor el procedimiento observa el ejemplo a continuación.

Obtén todas las respuestas para la ecuación diferencial de Bernoulli dy/ dx = y + y2.

Como puedes observar, la ecuación de Bernoulli dada tiene el valor de n = 3. Ahora, haciendolassustituciones en la ecuación,

v = y1-n

v = y-2

Esto nos da la nueva ecuación diferencial en términos de la nueva variable v como,

dv/ dx + 2v = −2

Al hacer uso de la prueba evaluadora, puede decirse que es una ecuación diferencial lineal. Para resolver esta ecuación, primero determinemos el factor de integración de la ecuación.

u(x). = exp (2 dx)

= e2x

u(x) q(x) dx

= e2x −2 dx

= -e2x

Esto nos da la solución general de la diferencial como,

v = [-e2x + c]/ e2x

= c e-2x – 1

Entonces el valor de y se calcula y = v-1/2

Ahora, resolviendo la ecuación diferencialde Bernoulli, y = ± (c e-2x – 1)−1/2

Como el valor de n es mayor que uno, por lo tanto, y = 0 es también una de las soluciones.

1.6 Aplicaciones.

Muchos de los problemas de la física como el movimiento de un sistema de masas unidos a resortes, como también algunos otros problemas prominentes de la ingeniería, etc. incluyen las ecuaciones diferenciales de orden superior para representar el estado de tal sistema.

Para tú asombro, incluso las actividades deportivas como el paracaidismo incluyen los conceptos de las ecuaciones diferenciales de orden superior para describir el movimiento de un cuerpo en el aire, su velocidad, aceleración, etc. Algunos de los ejemplos prominentes que toman en cuenta las ecuaciones diferenciales de orden superior son los siguientes.